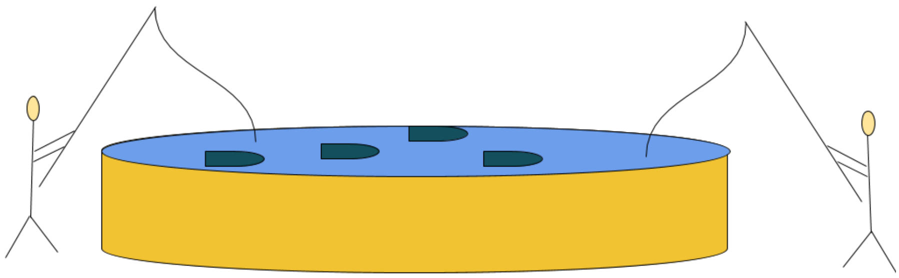
Kalojen ja kalastajien määrän mallintaminen Akatemian jalkaväki -blogiin

Olli-Pekka Tikkanen

Kuvitellaan tilanteen olevan kuvan 1 mukainen, missä jonkin lammikon luona on kalastamassa kalastajia ja lammikossa uiskentelee kaloja. Kalat pystyvät lisääntymään lammikossa, ja niitä häviää kalastajien saadessa niitä kiinni. Kalastajia ilmaantuu puolestaan lammikolle lisää, mikäli aikaisemmat kalastajat ovat saaneet napatuksi kaloja ja kalastajia lähtee pois kalastettuaan tarpeeksi. Haluamme tutkia tällaisen systeemin kehitystä ajassa eli kuinka kalastajien ja kalojen lukumäärä muuttuu ajan kuluessa.



Kuva 1: Esimerkkikuva kaksi kalastajaa ja neljää kalaa sisältävästä lammikosta

Vaikka meillä on ainoastaan neljä tapahtumaa (kaloja tulee lisää tai häviää ja kalastajia tulee lisää tai häviää), emme pysty suoraan kirjoittamaan matemaattista lauseketta, joka kuvaisi kalojen ja kalastajien määrää milloin tahansa esimerkiksi ensimmäisen sadan päivän aikana. Sen sijaan voimme yrittää kirjoittaa matemaattiseen muotoon kalojen ja kalastajien lukumäärän muuttumista yhden päivänä aikana kuvaavat lausekkeet. Kaloja syntyy lisää lammikkoon jollain nopeudella, joka riippuu kalojen määrästä lammikossa ja lisääntymisnopeudesta. Samoin on olemassa jonkinlainen tahti sille, että kala tarttuu koukkuun ja poistuu lammikosta. Tämä voidaan kirjoittaa matemaattisesti

$$\begin{aligned}\text{Kalojen määrän muutos päivässä} &= \text{lisääntymisnopeus} \cdot \text{kalojen lukumäärä} \\ &- \text{kiinnisaantitahti} \cdot \text{kalojen lukumäärä} \\ &\cdot \text{kalastajien lukumäärä},\end{aligned}$$

Kalastajien lukumääärän muutos puolestaan riippui kalojen kiinnisaantitahdista ja nopeudesta, millä kalastaja saa tarpeekseen kalastamisesta eikä enää palaa lammikolle.

$$\begin{aligned}\text{Kalastajien määrän muutos päivässä} = \text{kiinnisaantitahti} &\cdot \text{kalojen lukumäärä} \\ &\cdot \text{kalastajien lukumäärä} - \text{poistumisnopeus} \\ &\cdot \text{kalastajien lukumäärä}\end{aligned}$$

Olemme nyt kuvanneet matematiikan avulla kalojen ja kalastajien muutoksen päivässä. Kirjoittamiamme yhtälöitä kutsutaan differentiaaliyhtälöiksi, ja niitä pystytään ratkaisemaan yksinkertaisissa tapauksissa paperilla tai monimutkaisissa tapauksissa kuten nyt tietokoneen avulla. Koska haluamme pitää tämän esimerkin mahdollisemman yksinkertaisena ja helppolukuisena, ei seuraavaksi käydä läpi tapaa, jolla yhtälöt ratkaistaan. Todettakoon vain, että monet ohjelmointikielet tarjoavat valmiita ohjelmia, jotka ottavat sisäänsä kirjoittamamme yhtälöt, ja palauttavat kalojen ja kalastajien määrän eri ajan hetkinä. Aiheen matemaattisesta puolesta kiinnostuneet voivat hakea internetistä tietoa esimerkiksi hakusanoilla *'linear multistep method'* ja *'backward differentiation formula method'*.

Yhtälöiden ratkaisut riippuvat voimakkaasti eri prosessien (lisääntyminen, kiinnisaanti, poistuminen) nopeudesta ja kalojen ja kalastajien lukumäärästä nollahetkellä. Asetetaan tässä esimerkissä seuraavat arvot

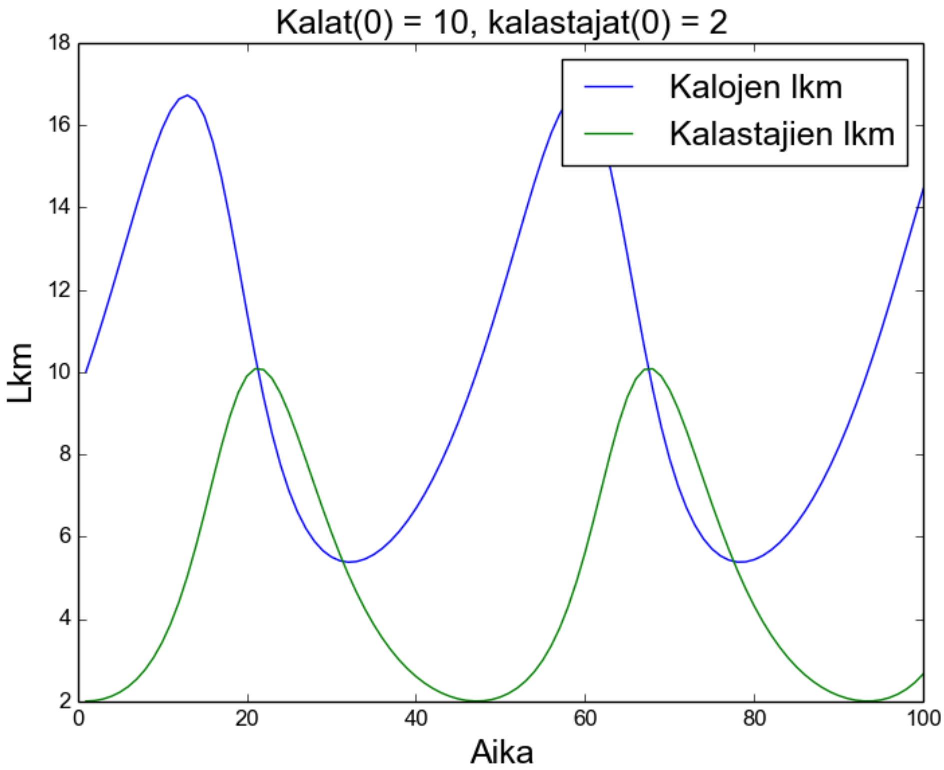
$$\begin{cases}\text{lisääntymisnopeus} = 0{,}1 \\ \text{kiinnisaantitahti} = 0{,}02 \\ \text{poistumisnopeus} = 0{,}2\end{cases}$$

ja keskitytään pelkästään muuttamaan kalojen ja kalastajien määrää alussa. Kaikkien parametrien vaikutuksista tutkittavaan systeemiin ja niiden fysikaalisesta tulkinasta saisi kirjoitettua vähintään kandidaatintutkielman.

Kuvassa 2 on kuvattuna sadan päivän ajalta kalojen ja kalastajien lukumäärä kun kaloja on aluksi kymmenen ja kalastajia kaksi kappaletta. Kuvaajasta nähdään hienosti, että kalojen ja kalastajien lukumäärät alkavat noudattaa toistuvaa kaavaa. Ensin kalojen lukumäärä nousee, mikä aiheuttaa hieman myöhemmin kalastajien lukumäärän nousun. Kalastajien lukumäärän kasvaessa kaloja aletaan saamaan kiinni enemmän ja enemmän, kunnes niiden määrä pienenee niin pieneksi, että vähemmän innokkaat kalastajat kyllästyvät odottelemiseen ja vaihtavat maisemaa. Kalastajien lukumäärän pudotessa kalojen lisääntymistahti on jossain kohdassa suurempi kuin kiinnisaantitahti ja koko sykli alkaa alusta.

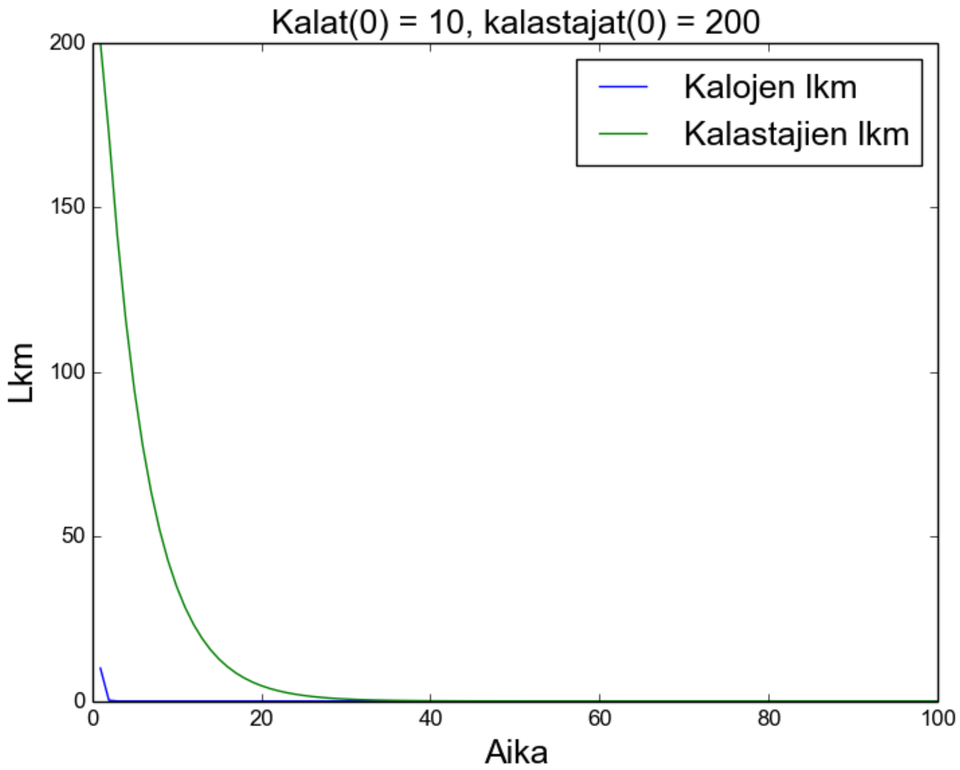
Entäpä jos kalastajia tai kaloja on alussa huomattavasti toista enemmän? Jos kalastajia on vaikkapa kaksisataa kymmentä kalaa kohden, on helppo arvata mitä käy (kuva 3). Kalastajat kalastavat lammikon niin nopeasti tyhjäksi, että kalat eivät kerkeä tuottamaan tarpeeksi jälkeläisiä ja kuolevat sukupuuttoon. Pikkuhiljaa myös kalastajat lähtevät paremmille kalavesille. Mielenkiintoisempi ilmiö systeemissämme on tilanne, missä kaloja on huomattavasti enemmän kuin kalastajia. Kuvassa 4 on kalojen ja kalastajien lukumäärä sadan ensimmäisen päivän ajalta kun kaloja on aluksi kaksisataa ja kalastajia vain kaksi kappaletta. Kuvasta nähdään, että mikäli kaloja on ylimäärin kalastajiin nähden kalastajat saavat niin paljon kalaa, että heitä ilmaantuu paikalle ylimäärin ja kalat kalastetaan jälleen sukupuuttoon!

Käyttämämme varsin yksinkertainen malli pystyy siis kuvaamaan aivan tosielämässäkin tapahtuvia ilmiöitä: mikäli kalastajien määrää ei rajoita mikään muu tekijä kuin niiden

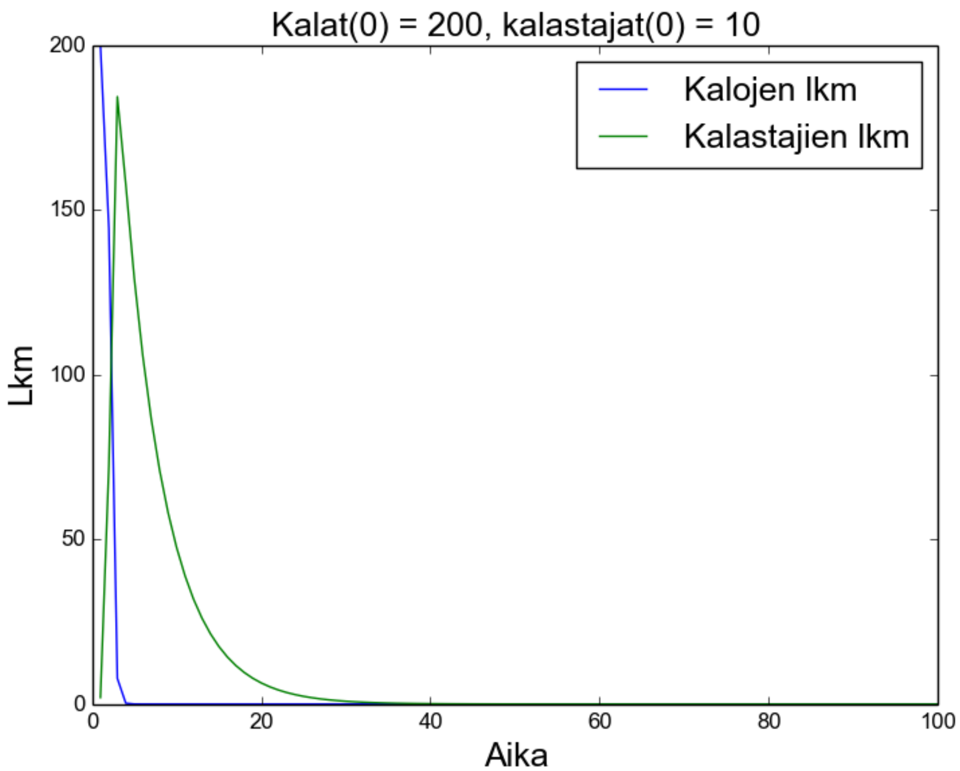


Kuva 2: Kalastajien ja kalojen lukumäärä sadan ensimmäisen päivän aikana kun kaloja on alussa kymmenen ja kalastajia kaksi kappaletta

luonnollinen poistuminen ja kalojen on ylimäärin kalastajiin verrattuna, voi seurauksena olla koko kalakannan häviäminen. Tässä esimerkissä olemme puhuneet vain kaloista ja kalastajista, mutta ne voisivat aivan yhtä hyvin olla mitä tahansa saalita ja saalistajia. Ajatelkaapa vaikka biisoneita ja uudisasukkaita Amerikassa.



Kuva 3: Kalastajien ja kalojen lukumäärä sadan ensimmäisen päivän aikana kun kaloja on alussa kymmenen ja kalastajia kaksisataa kappaletta



Kuva 4: Kalastajien ja kalojen lukumäärä sadan ensimmäisen päivän aikana kun kaloja on alussa kymmenen ja kalastajia kaksisataa kappaletta