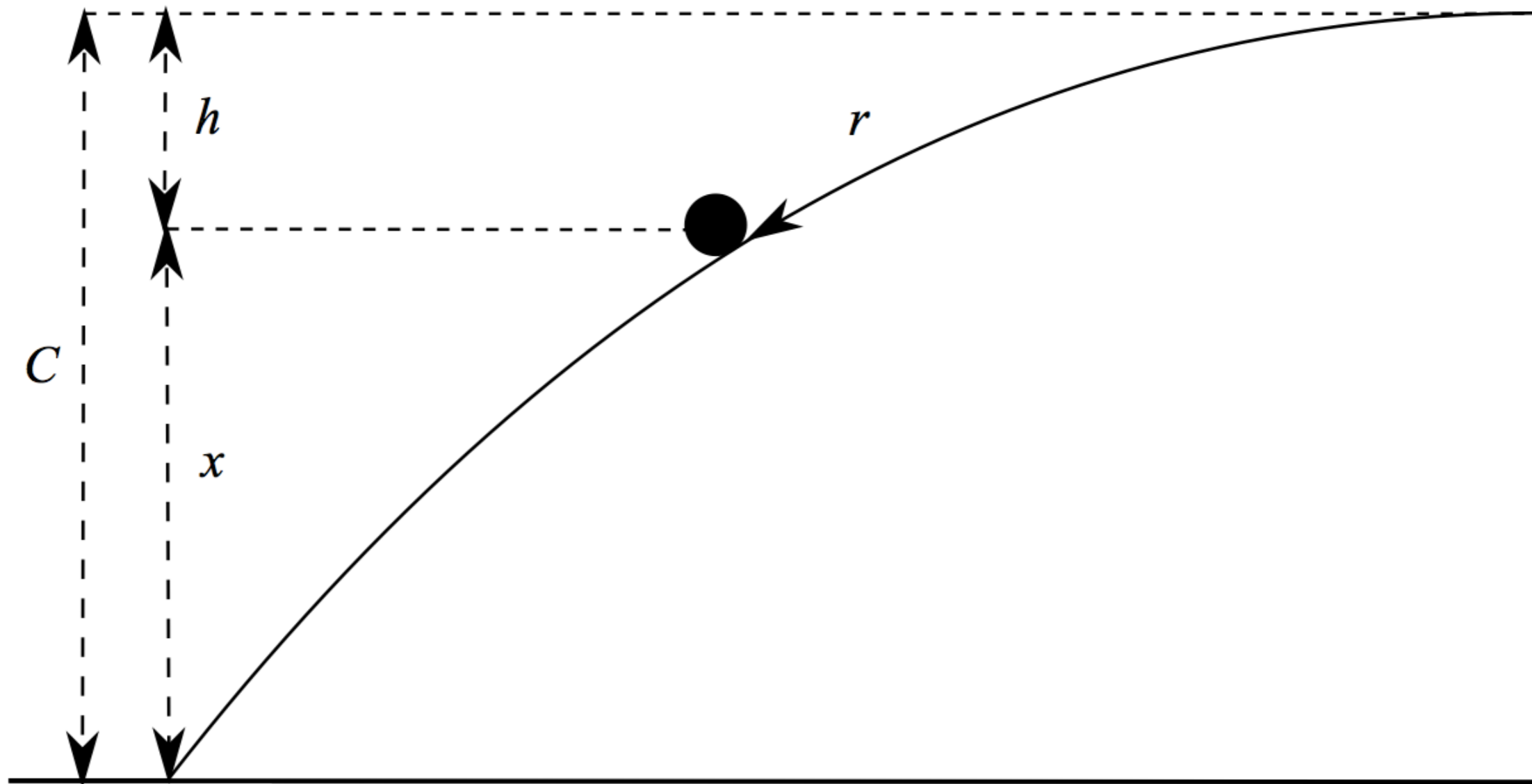
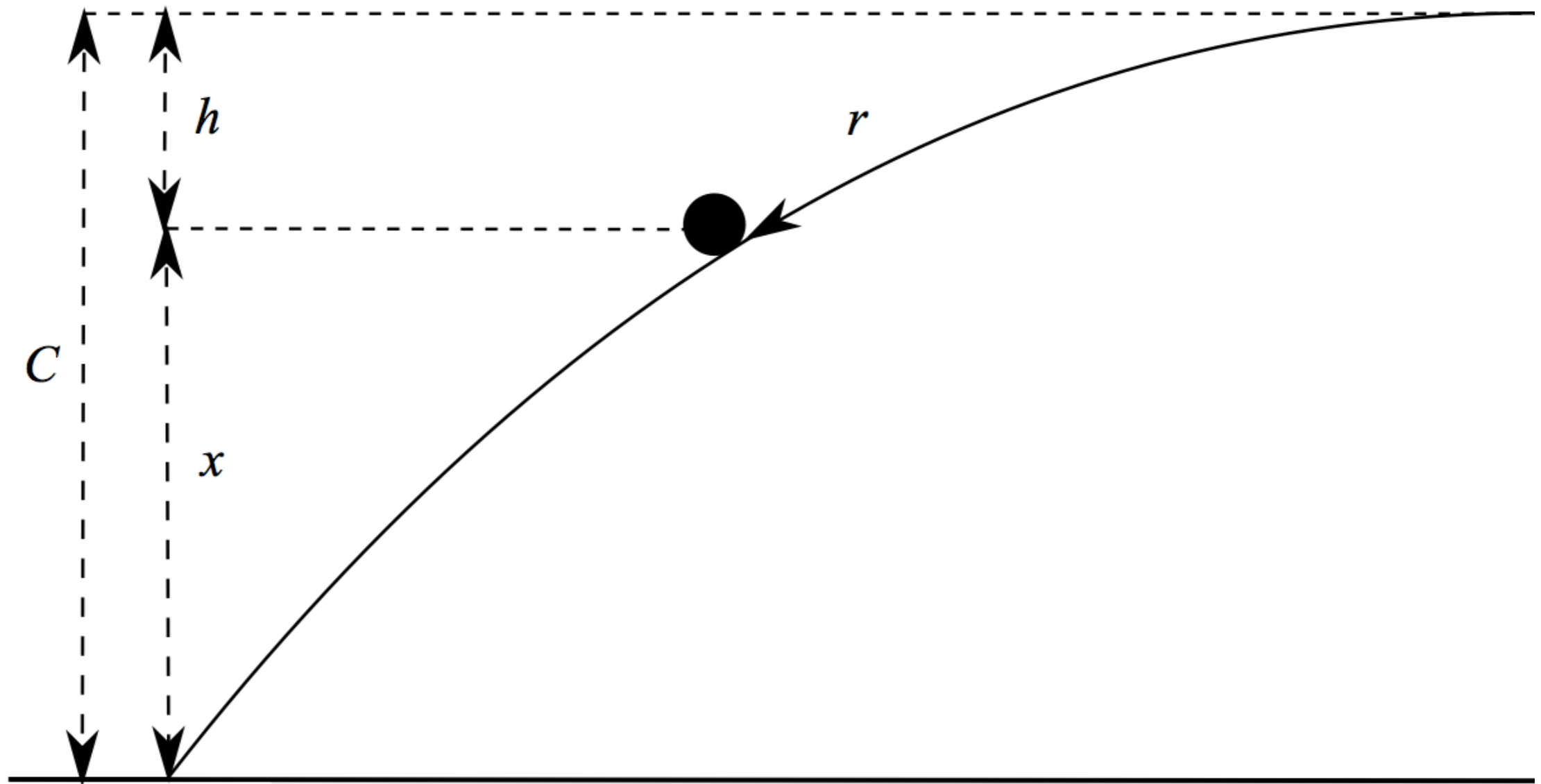


# Mass on the Dome

Fyysikoiden näkökulmia



$$h = \frac{2}{3g} r^{3/2}$$



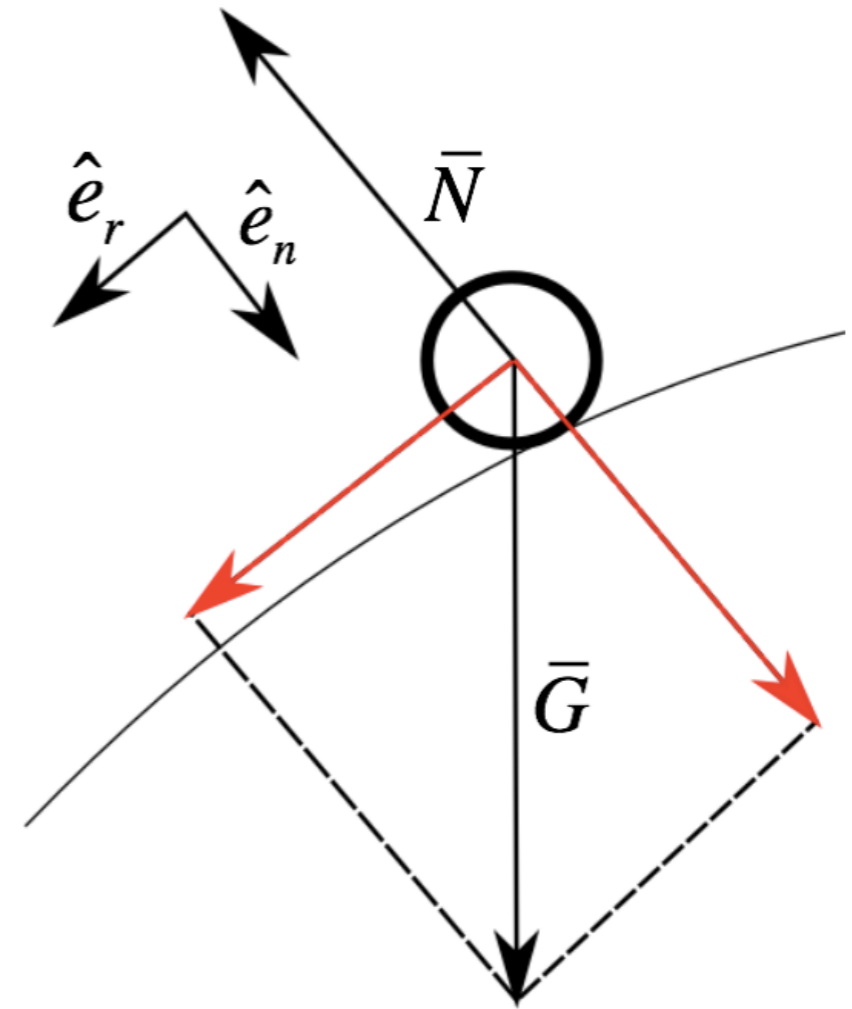
$$m = 1$$

Kappaleeseen vaikuttavat voimat: painovoima ja pinnan tukivoima (ei vastusvoimia).

$$\begin{aligned} U &= mgx \\ &= g(C - h) \end{aligned}$$

Konservatiiviselle voimalle:

$$\bar{F} = -\nabla U(x)$$



Voiman  $r$ :n suuntainen komponentti:

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} g(C - h) = \frac{\partial}{\partial r} gh$$

$$F_r = g \frac{\partial}{\partial r} h = g \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{2}{3g} r^{3/2} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} r^{1/2}$$

$$= \sqrt{r}.$$

$$F_r = ma_r = m \frac{d^2 r}{dt^2} \quad \xrightarrow{m=1} \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \sqrt{r}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \sqrt{r}$$

Eräs mahdollinen ratkaisu:

$$r(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t \leq T \\ \frac{1}{144}(t - T)^4, & \text{kun } t \geq T \end{cases}$$

# Ei yksikäsitteistä ratkaisua 1

- ”Jos yhtälöllä on useita ratkaisuja, se tarkoittaa, että todellinen käytös on niiden joukossa – ei että kaikki ratkaisut toteutuvat.”
- ”Tällä ei ole oikeastaan mitään tekemistä Newtonin lakien kanssa. Tulos on hyvin tunnettu esimerkki siitä, mitä tapahtuu, kun alkuarvo-ongelman ratkaisun olemassaolon ja yksikäsitteisyyden takaavan matemattisen lauseen oletukset rikkoutuvat. Kupoliesimerkissä voima on  $r^{1/2}$ , ja tämän derivaatta ei ole jatkuva pisteessä  $r=0$ .”
- ”Todellinen ratkaisu on matemaattisten ratkaisujen joukossa. Tämä tarkoittaa, että tarvitsemme teorian ulkopuolista tietoa todellisuutta kuvaavan ratkaisun valintaan. Kausaliteetti-vaatimus on yksi tällainen valintaperuste. Joten tässä mielessä Newtonin mekaniikka ei sisällä kausaliteettia.”

## Ei yksikäsitteistä ratkaisua 2

”Esitetty ratkaisu on sinänsä Newtonin kolmen liikelain mukainen. Perinteiset toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön reunaehdot (jos se otetaan alkuarvoprobleemana eikä reuna-arvoprobleemana) eivät riitä kiinnittämään ratkaisua tavalla, joka kieltäisi liikkuvan ratkaisun.

Ratkaisuilla on kuitenkin eroa. Jos lasketaan voiman kolmas derivaatta saadaan deltafunktio. Gravitaation ja tukivoiman yhdistelmän dynamiikka ei tuota tuollaista termiä, joten ratkaisu ei toteudu idealisoidussa Newtonin fysiikassa ilman ulkopuolista puuttumista: tilanteessa olevat vuorovaikutukset eivät voi tätä saada aikaan (tai gravitaatiossa/tukivoimissa on piirteitä, joita minä en tunne).”



# Tilanne epäfysikaalinen

- ”Esimerkki on niin ideaalinen, ettei se ole todellisuuden kannalta relevantti.”
- ”Luonnon kuvauksemme on aina approksimatiivista. Massapisteitä, täsmälleen esitetyn muotoisia kupoleita ja näiden häiriöttömiä yhdistelmiä ei ole. Jos onnistumme tasapainottamaan massapistettä edustavan kappaleen kupolin laelle, siinä on jokin äärellinen kynnyks liikkeellelähdölle. Kappale lähtee liikkeelle, kun jokin häiriö, vaikkapa lämpöliike, ylittää kynnyksen. Näin ollen epätietoisuus siitä, milloin kappale lähtee liikkeelle, johtuu siitä ettemme tunne tilannetta riittävän tarkasti. Tämä koskee kaikenmuotoisia kupoleita.”

# Kausaliteetti

”Saan Nortonista irti sen pointin, että Newtonin mekaniikassa ei ole kausaliteettia siinä mielessä, että ”voima edeltää kiihtyvyyttä”. Toinen lakihan sanoo nimenomaan, että ne ovat samanaikaisia. Yleensä kun fyysikot puhuvat kausaliteetista, se liittyy äärelliseen signaalinopeuteen (valonnopeuteen). Tätäkään ei ole Newtonin fysiikassa, koska Newtonin painovoima vaikuttaa välittömästi mielivaltaisen kauas.”

# Ajankääntösymmetria

”Tässä ei ole vaikeuksissa kausaliteetti vaan ajankääntösymmetria. Kausaliteetin kannalta tilanne on yksinkertainen. Kuulaan ei vaikuta voimia, joten se ei lähde liikkeelle.

Ajankääntösymmetria taas ei ole Newtonin lakien ominaisuus vaan liittyy sellaiseen mekanistiseen biljardipallomaailmankuvaan, jossa vuorovaikutukset voidaan kuvata biljardipallojen törmäyksinä. Biljardipallomaailmassa aika voidaan kääntää, ja saadaan edelleen mahdollinen tapahtumien kulku. Esimerkissä kuulan ja kupolin rakenneosien välinen vuorovaikutus on korvattu ideaalisella pinnan tukivoimalla. Vaikka tukivoima ei aiheuta kiihtyvyyttä, se on siellä pitämässä kuulan halutulla radalla. Veikkaan että biljardipallomaailmassa ei ole mahdollista aikaansaada esimerkin mukaista tukivoimaa sillä ideaalisuuden tasolla kuin esimerkki vaatisi.”

## Malli vs. luonto

”Mielestäni ei tarkoita maailman eikä kausaliteetin kannalta yhtikäs mitään, jos jostain fysiikan teoriasta puuttuu kausaliteetti. Maailma on olemassa riippumatta fysiikan teorioista. Kausaalisuus on oma mallinsa, joka vaikuttaa kuvaavan todellisuutta hyvin. (Sitä on myös käytetty postulaattina monia kehittyneempiä malleja luotaessa, esim. suhteellisuusteoria.) Sen saa kyseenalaistettua esittämällä todellisia kausaalisuutta rikkovia ilmiöitä, ei jonkin muun matemaattisen mallin kanssa yhteensopivia ei-kausaalisia tilanteita, jotka eivät ole realistisia.

Fysiikan kannalta: Jos jokin fysiikan malli tuottaa huomattavasti ei-kausaalisia ratkaisuja, se on varsin huono malli. Newtonin mekaniikka tuottaa niitä kuitenkin varsin harvoin ja hyvin spesifeissä tilanteissa.”